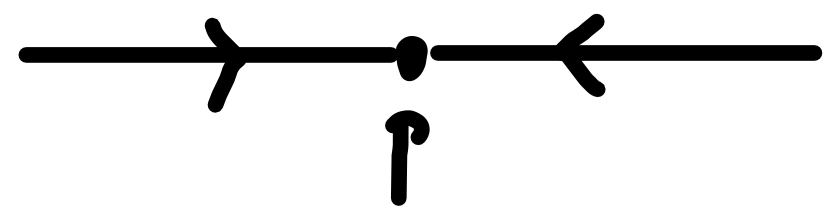
Vorlesung (9), 1.7.2022

[Wh.: Zusammenfassung von (asympt.) Stabilität und charakt. Exponenten von Gleichgewichtslagen bei nicht-linearen Systemen:

(1) $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$, $\forall \alpha \in sp(Df(p)) \Longrightarrow p$ ist Attraktor

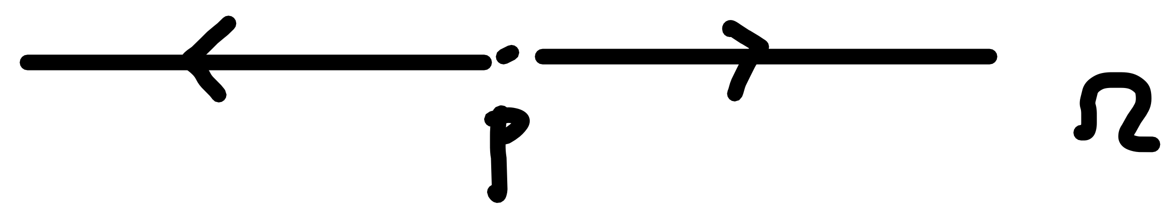
„$\Longleftarrow$": i.a. nicht: Attraktoren können char. Exponenten α mit $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$ haben, z.B. bei $f(x) = -x^3$,



$\Omega = \mathbb{R}$

(2) Es gilt: p t-stabil $\Longrightarrow \operatorname{Re}(\alpha) \leq 0$, $\forall \alpha \in sp(Df(p))$ (siehe z.B. Hirsch/Smale, Kap. 9, §2)

„$\Longleftarrow$" i.a. nicht, z.B. bei $\Omega = \mathbb{R}$, $f(x) = +x^3$



Vor allem: Falls es ein $\alpha \in sp(Df(p))$ mit $\operatorname{Re}(\alpha) = 0$ gibt, kann eigentlich *alles* passieren.

Wunsch. Gibt es auch ein Kriterium für (asympt.)

Stabilität, falls $Re(\alpha) \leq 0$, $\forall \alpha \in \sigma(Df(p))$

2.5. Liapunov-Funktionen

Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet und $\varphi = (\varphi^t)$ ein dynamisches System auf Ω. Eine (stetige) Funktion $G : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Liapunov-Funktion für φ*, wenn für alle $x \in \Omega$ und alle $0 \leq t < t_+(x)$ gilt:

$$G(\varphi^t(x)) \leq G(x).$$

__Kommentar.__ (a) Da für $0 \le t_1 < t_2 < t_+(x)$

$$G(\varphi^{t_2}(x)) = G(\varphi^{t_2 - t_1 + t_1}(x)) \overset{FE}{=}$$

$$G(\varphi^{t_2 - t_1}(\varphi^{t_1}(x))) \le G(\varphi^{t_1}(x))$$

ist, ist also $[0, t_+(x)) \to \mathbb{R}$,

$$t \mapsto G(\varphi^t(x))$$

monoton fallend.

(b) Insbesondere ist also jedes 1. Integral für φ Liapunov-Funktion.

(c) Wir schreiben im Folgenden, dass $p \in \Omega$ ein striktes, lokales Minimum von G ist, wenn es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(p) \subseteq \Omega$ gibt und

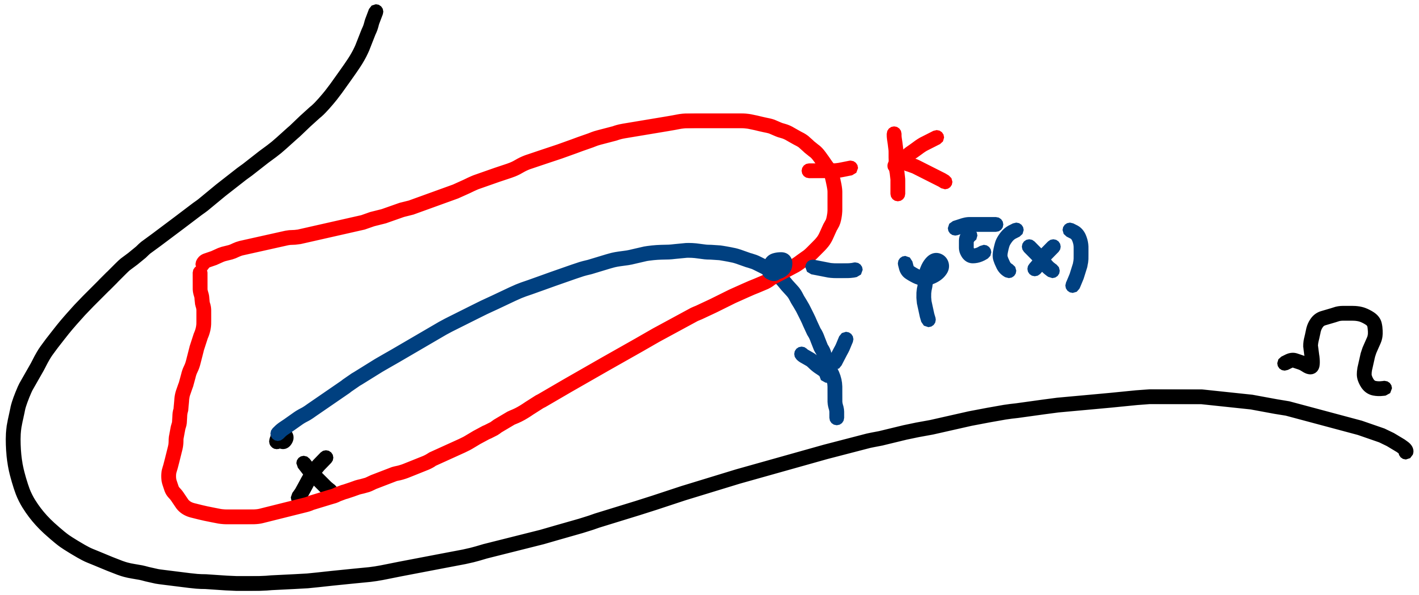
$$G(x) > G(p), \quad \forall x \in B_\delta(p) \setminus \{p\}.$$

Satz (Dirichlet). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet und $\varphi = (\varphi^t)$ ein dynamisches System auf Ω. Ist $G : \Omega \to \mathbb{R}$ eine

Liapunovfunktion für φ und p ein striktes, lokales Minimum von G, so ist p eine $+$-stabile Gleichgewichtslage von φ.

Erinnerung. Ist φ max. dynamisches System zur gew. Dgl. $\dot{x} = f(x)$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$) und $x \in \Omega$ mit $t_+(x) < \infty$, so muss die Bahn $[0, t_+(x)) \to \Omega$, $t \mapsto \varphi^t(x)$, von x jedes Kompaktum $K \subseteq \Omega$ verlassen, d.h.: Ist $K \subseteq \Omega$ kompakt, so existiert ein $0 < \tau < t_+(x)$:

$$\varphi^t(x) \notin K, \quad \forall \tau < t < t_+(x).$$



<u>Beweis des Satzes.</u> 1. p muss Gl.-lage sein, denn $[0, t_+(p)) \to \Omega$, $t \mapsto G(\varphi^t(p))$ müsste sonst für $t>0$ klein anwachsen: ↯ $\Rightarrow$ $\varphi^t(p) = p$, $\forall\, 0 \le t < t_+(p)$

$\Rightarrow$ $t_+(p) = \infty$ (da z.B. die Bahn das Kompaktum $K = \{p\}$ nicht verlässt).

2. Sei nun $\mu > 0$ so, dass $B_\mu(p) \subseteq \Omega$ und

$$G(x) > G(p), \quad \forall x \in B_\mu(p) \setminus \{p\}.$$

O.E.: $G(p) = 0$

Für $0 < \varepsilon < \mu$ beliebig setzen wir

$$\alpha(\varepsilon) := \min\{ G(x) \in \mathbb{R} : \|x - p\| = \varepsilon\} > 0.$$

Sei weiter

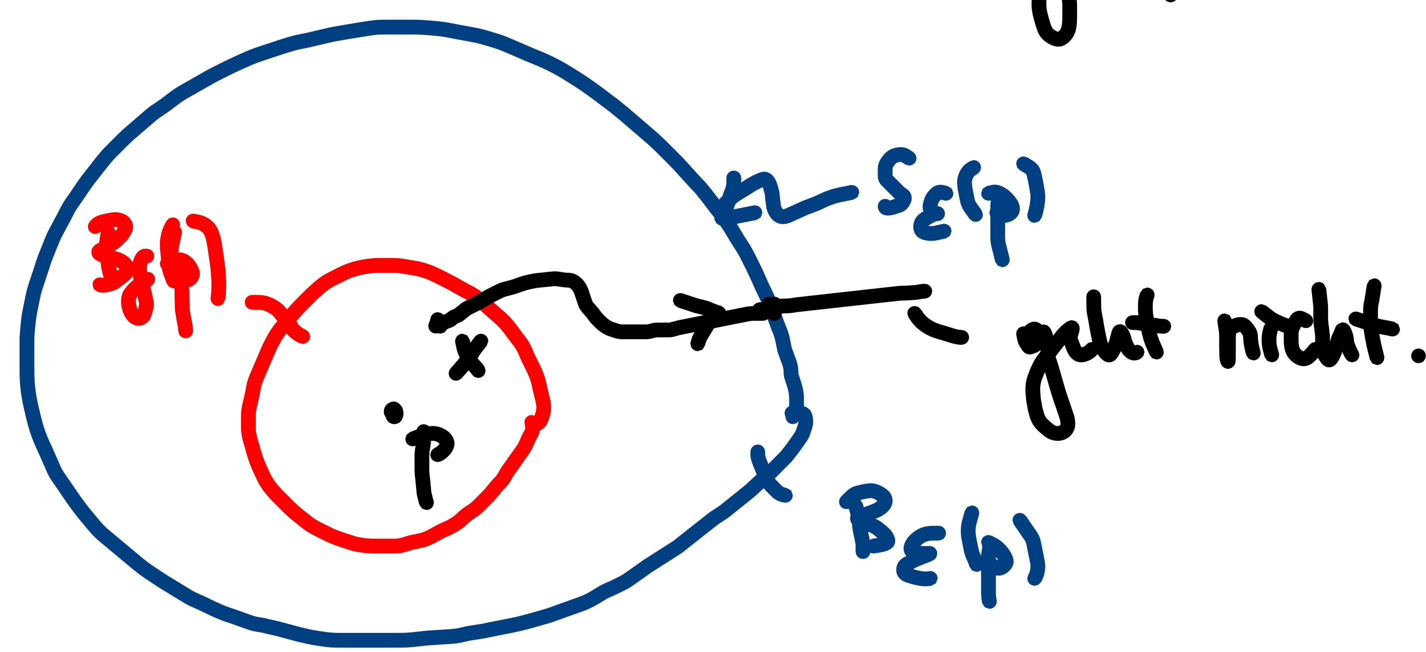
$$U_\varepsilon := \{ x \in \Omega : G(x) < \alpha(\varepsilon)\}$$

$\Rightarrow$ $U_\varepsilon \subseteq \Omega$ ist offen und $p \in U_\varepsilon \Rightarrow \exists \delta > 0$:
$B_\delta(p) \subseteq U_\varepsilon$. Für alle $x \in B_\delta(p)$ gilt nun:
$[0, t_+(x)) \to \Omega$, $t \mapsto \varphi^t(x)$, kann

$$K := \overline{B_\varepsilon(p)}$$

nicht verlassen, denn auf $S_\varepsilon(p) = \partial B_\varepsilon(p)$ wäre G größer als in x. Es folgt:

$$t_+(x) = +\infty$$



und $\forall\, 0 \le t$:

$$\| \varphi^t(x) - p \| < \varepsilon.$$

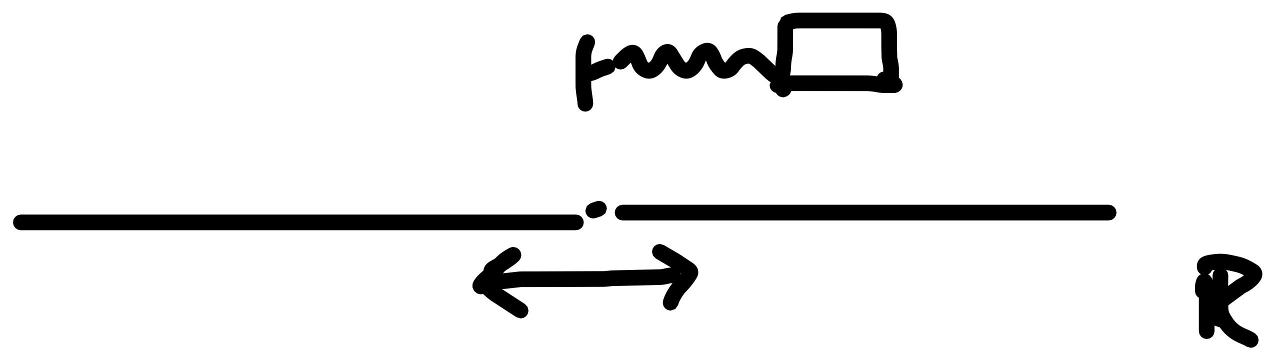
Also: p ist (+-) stabil.

$\blacksquare$

Beispiel. (Gedämpfte Schwingung). Sei $\gamma > 0$, $\omega > 0$.
Dann beschreibt

$$\ddot{x} + \gamma \cdot \dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (\text{auf } \mathbb{R})$$

die Bewegung einer gedämpften Schwingung.



Definiert man $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \Omega \to \mathbb{R}$,

$$G(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2,$$

so ist G zwar kein 1. Integral (wie bei $\gamma = 0$), aber immerhin noch Liapunov:

$$\frac{d}{dt} G(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, \dot{x}) \cdot \dot{x} + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \cdot \ddot{x}$$

$$= (\omega^2 x) \cdot \dot{x} + \dot{x} \cdot \ddot{x} = \dot{x} \left(\omega^2 x - \gamma \cdot \dot{x} - \omega^2 x \right) = -\gamma \dot{x}^2 \leq 0.$$

Da $p = (0,0)$ offenbar sogar globales striktes Minimum von G ist, ist $p = (0,0)$ also stabil. (Allerdings: Berechnung der char. Exponenten ergibt, dass $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ ist für beide char. Exponenten von p, also p sogar Attraktor.)

Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet und $V : \Omega \to \mathbb{R}$ wenigstens 2 mal stetig diffbar. Wir nennen dann das zu

$$\dot{x} = -\operatorname{grad}(V)(x) \qquad (*)$$

gehörende dynamische System *das Gradientensystem zu V* auf Ω.

Kommentar. (a) Der Fluss $t \mapsto \varphi^t(x)$ zu $(*)$ folgt der „Richtung des steilsten Abstieges des Gebirges", welches durch den Graph von V gegeben ist.

(b) Beachte, dass V nun selbst eine Liapunov-Funktion für φ ist:

$$\frac{d}{dt} V(\varphi^t(x)) = \Big\langle \operatorname{grad}(V)(\varphi^t(x)), \underbrace{\frac{d\varphi^t}{dt}(x)}_{= -\operatorname{grad}(V)(\varphi^t(x))} \Big\rangle$$

$$= - \| \operatorname{grad}(V)(\varphi^t(x)) \|^2 \leq 0,$$

also $t \mapsto V(\varphi^t(x))$ monoton fallend, für alle $x \in \Omega$.

(c) Ist daher $p \in \Omega$ ein striktes lokales Minimum von V, so ist also p stabil.

Beachte, dass hier die char. Exponenten von p gerade die Eigenwerte von $\mathrm{Hess}(V)(p)$ sind, welche wegen der Symmetrie von $\mathrm{Hess}(V)(p)$ alle reell sind. Diese müssen zwar nicht-positiv sein, müssen aber nicht echt negativ sein, es könnten auch Null-Eigenwerte dabei sein, z.B. könnte $\mathrm{Hess}(V)(p) = 0$ sein. Dann ist das Kriterium über die char. Exponenten nicht anwendbar, wohl aber der Satz von Dirichlet.

§3. Limesmengen

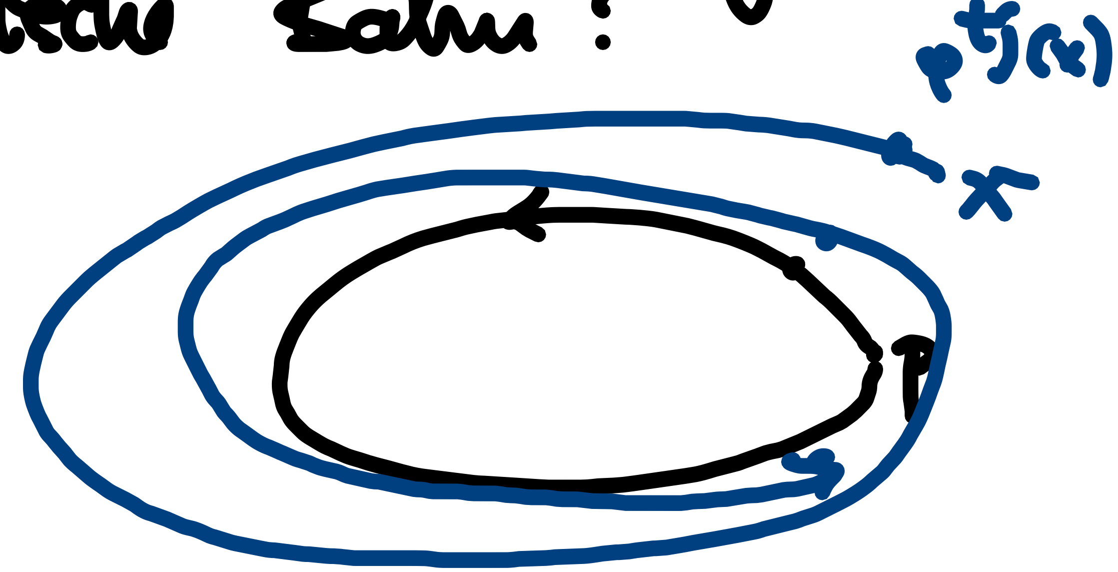
(3.1) Motivation und grundlegende Begriffe

Erinnerung. Ist $p \in \Omega$ asympt.-stabile Gl.-lage eines dyn. Systems $\varphi = (\varphi^t)$ auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, so gilt für eine offene $U \subseteq \Omega$: $t_+(x) = +\infty$ und

$$\lim_{t \to \infty} \varphi^t(x) = p \quad , \quad \forall x \in U.$$

Solche Zustände sind physikalisch realistisch, z.B die untere Gl.-lage beim math. Pendel, Nicht realistisch sind dagegen Gl.-lagen mit einem char. Exponenten α mit $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, z.B. die obere Gl.-lage beim math. Pendel, weil bereits kleinste Änderungen der Anf.-lage die Situation verändert.

Frage: Gegen was kann eigentlich eine Bahn $t \mapsto \varphi^t(x)$, $0 \leq t < t_+(x)$, für $x \in \Omega$, „konvergieren"? z.B. gegen eine periodische Bahn?



Erinnerung. (a) $p \in \Omega$ heißt periodischer Punkt von $\varphi = (\varphi^t)$, falls $t_+(p) = \infty$ und es ein $T > 0$ gibt mit

$$\varphi^T(p) = p. \qquad (*)$$

Wir vereinbaren, dass Gl.-lagen nicht periodisch sind. Es gibt dann ein kleinstes $T > 0$ mit $(*)$. Es heißt die Periode von p.

(b) Beachte, dass wegen der Fluss-Eigenschaft dann für alle $t \in \mathbb{R}$ (es ist auch $t_-(p) = -\infty$) gilt:

$$\varphi^{t+T}(p) = \varphi^t(\underbrace{\varphi^T(p)}_{=p}) = \varphi^t(p).$$

Die Bahn

$$\gamma(p) = \{ \varphi^t(p) \in \Omega : t \in I(p) \}$$

$$= \{ \varphi^t(p) \in \Omega : 0 \leq t \leq T \}$$

ist daher kompakt und daher auch $I(p) = \mathbb{R}$.

(c) Für jedes $x \in \Omega$ bezeichnen wir mit

$$\gamma^+(x) = \{ \varphi^t(x) : 0 \leq t < t_+(x) \}$$

die positive Halbbahn von x, entsprechend $\gamma^-(x)$.

Definition. Sei $\varphi = (\varphi^t)$ ein (maximales) dynamischer System auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \Omega$. Wir nennen $y \in \Omega$ einen ω-Limespunkt von x, wenn es eine Folge (t_j) mit $0 \le t_j < t_+(x)$, $\forall j \in \mathbb{N}$, mit $(t_j) \longrightarrow t_+(x)$ gibt, so dass

$$(\varphi^{t_j}(x)) \longrightarrow y.$$

Die Teilmenge

$$\omega(x) := \{ y \in \Omega : y \text{ ist } \omega\text{-Limespunkt von } x \}$$

heißt die *ω-Limesmenge von x*

Kommentar. Entsprechend definiert einen *α-Limespunkt* bzw. die *α-Limesmenge von x* bei Folgen (t_j) mit $(t_j) \to t_-(x)$ (α für „Anfang", ω für „Ende").